UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

TEORÍA ERGÓDICA 2018-1

AUTORES

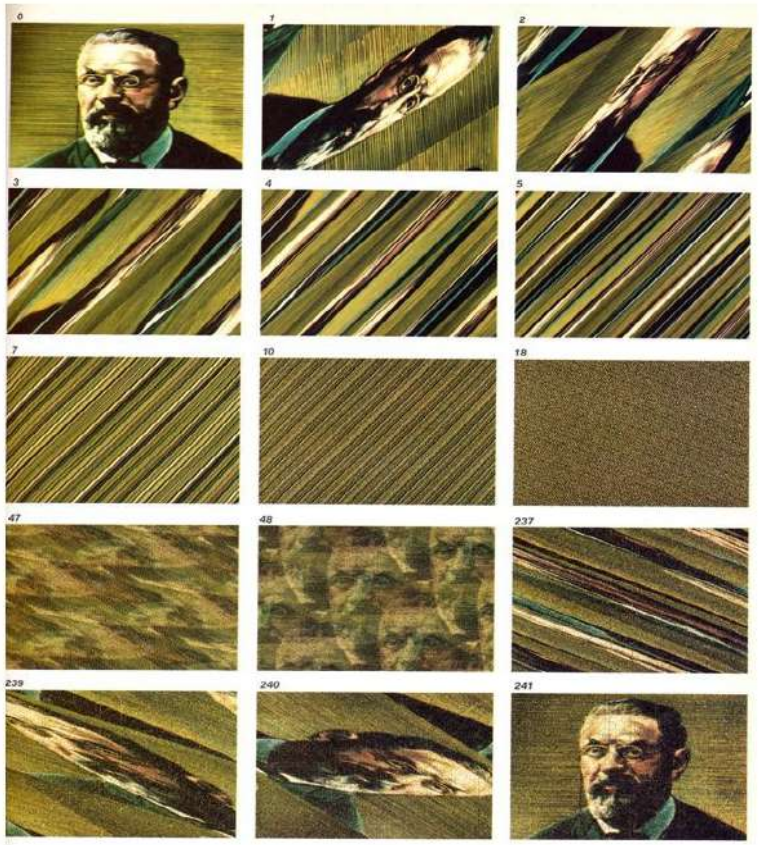
JESSICA FRINETH CULMA PERDOMO
Cod:2011198830
PEDRO ANDRES SANCHEZ CHARRY
Cod:2011102910
DIANA MARCELA PIRAGUA DIAZ
Cod: 20121110782
ANDERSON ORTIZ MORALES
Cod:20122112069
NATALY HURTADO CARDENAS
Cod:20122112746
ANDRES LEON VARGAS
Cod:20111102015
DIEGO ARMANDO GIRON MURCIA
Cod: 20111100246
Carolina Payan
Cod:20141126278

HENRI POINCARÉ (Nancy, Francia, 1854 - París, 1912)

El matemático y físico Henri Poincaré cuestiono la perfección newtoniana en relación con las orbitas planetarias, lo que se conoce como el problema de los tres cuerpos.

Planteaba una atracción gravitatoria múltiple, hasta entonces se resolvía con las leyes de newton y la suma de un pequeño valor que compensara la atracción del tercer elemento.

Poincaré descubrió que, en situaciones criticas, ese tirón gravitatorio mínimo podía realimentarse hasta producir un efecto de resonancia que modificara la orbita o incluso lanzara al planeta fuera del sistema solar.



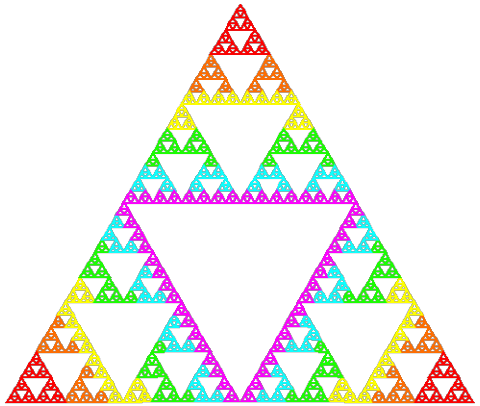
UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

TEORÍA ERGÓDICA

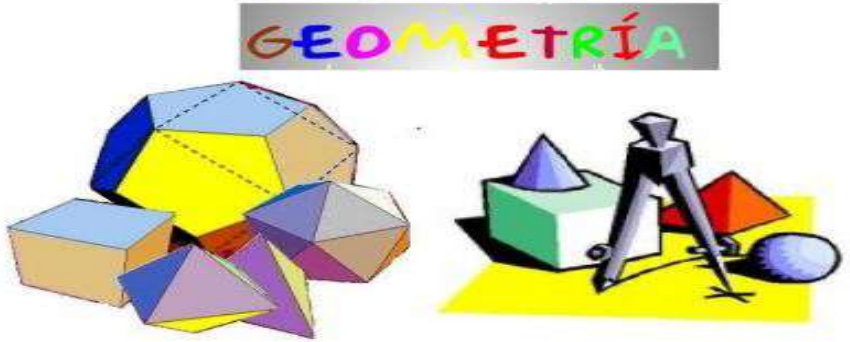
Estudia

Las Transformaciones que preservan medida

Conjuntos de Medida Cero



Aplicaciones



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

ASPECTOS ELEMENTARES DE LA TEORIA ERGÓDICA

Teoría Ergódica: La teoría ergódica es una parte de la teoría de los sistemas dinámicos. Estudia transformaciones y procesos de los sistemas dinámicos que preservan medida, por lo tanto sus resultados suelen ser enunciados en el lenguaje de las teorías de la medida.

- los sistemas dinámicos medibles (X, B, μ, T) constituidos por un conjunto X, por una **σ-álgebra** de subconjuntos de X, una **medida de probabilidad** sobre B (o sea $\mu(X) = 1$) y una transformación $T: X \to X$ que preserva medida

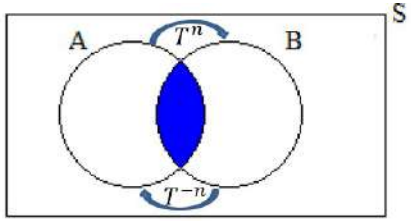
  para todo $A \in B$, $T^{-1}A \in B$ y $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

- **Teorema de recurrencia de Poincaré:** Dada una transformación que **preserva medida** y un subconjunto medible de su dominio, casi todo punto del referido subconjunto regresa infinitas veces a él mismo por iteraciones de la transformación.

- **Procesos mezclantes:** las transformaciones mezclantes, las cuales están caracterizadas por la siguiente propiedad de recurrencia: Para todo A, B

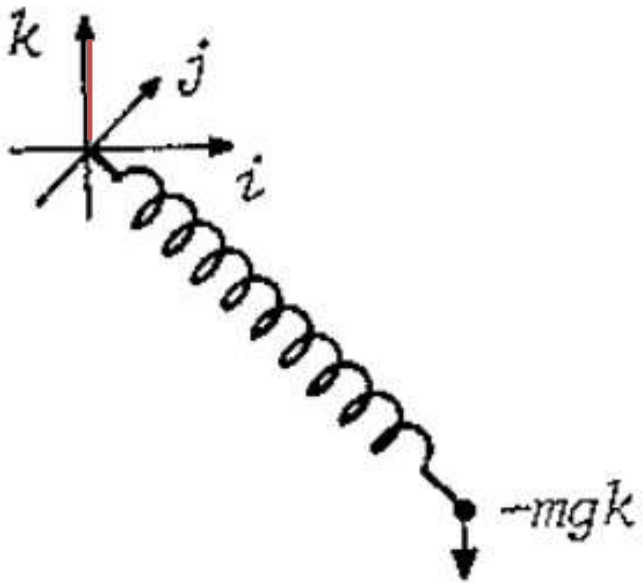
$$\lim_{n \to \infty} \mu(T^{-n} A \cap B) = \mu(A).\mu(B)$$

Las transformaciones mezclantes forman una subfamilia de las ergódicas.



A ∩B

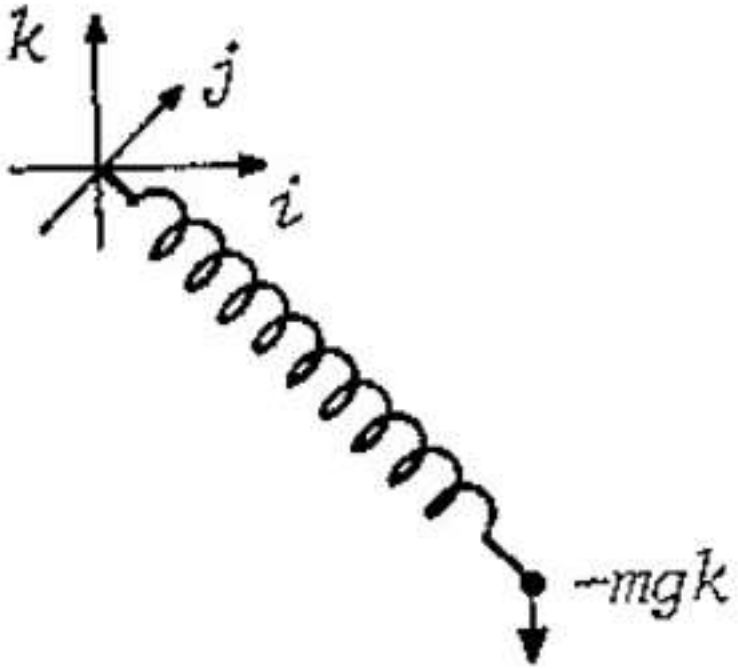
Ejemplo 1. **Péndulo-Resorte**



- Sea m una partícula de masa, ligada por un resorte en un punto fijo.
- Supongamos que las únicas fuerzas que actúan son: gravitacional donde
  k es el vector unitario
  g es la constante gravitacional
  una fuerza de restauración del resorte.
- Partícula con condición inicial
- Partícula de evolución descrita por la función donde

Enunciado del Teorema:

Para casi toda condición inicial una partícula se mueve recurrentemente, significa que la regresa infinitas veces a posiciones y velocidades arbitrariamente próximas a la inicial.



Bosquejo de la demostración:

- Tomamos un punto fijo que esté ligado al resorte y en el origen.
- La condición inicial que pertenece a $(R^3 - \{0\}, R^3)$.
- Diremos que la función

$x: [0, \infty) \to \left(x(t), v(t)\right) \in (R^3 - \{0\}, R^3).$

Y recurrente si existen tal que}

$$\lim_{j \to +\infty} x(t_j) = x(0)$$

$$\lim_{j \to +\infty} v(t_j) = v(0)$$

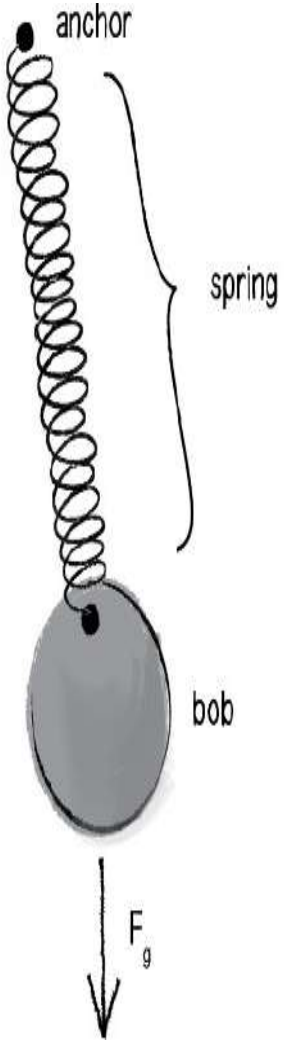
Teorema 1 Para cada $(x, v) \in (\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R})$, el movimiento del resorte con condición inicial y recurrente.

Para cada $(x, v) \in (\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R})$, el movimiento del resorte con condición inicial y recurrente.

condición inicial (x, v) y recurrente.

- Denotemos por la fuerza que ejerce el resorte cuando esta en el punto Al escribir y no se
- Demostración: Denotemos por $f(x)$ la fuerza que ejerce el resorte cuando esta en el punto x. Al escribir $f(x)$ y no $f(x, v)$ se asume que la fuerza no depende de la velocidad, lo que es físicamente elogiable aunque no sea verdad para velocidades muy grandes, las otras hipótesis serán:
  1. colineal con x
  2. solo depende de x
  1. $f(x)$ colineal con x
  2. $f(x)$ solo depende de x

Demostración: Denotemos por $f(x)$ la fuerza que ejerce el resorte cuando esta en el punto x. Al escribir $f(x)$ y no $f(x, v)$ se asume que la fuerza no depende de la velocidad, lo que es físicamente elogiable aunque no sea verdad para velocidades muy grandes, las otras hipótesis serán:

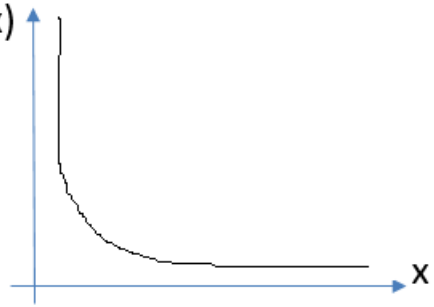


3. Por (1) y (2) podemos escribir

$$\frac{dx}{dt} = x^{\cdot} = f(x) = f(\| x \|)\left(\frac{x}{\| x \|}\right)$$

4.

4. $\lim_{r \to 0} f(r) = +\infty$



La importancia de este teorema radica en la hipótesis (4), ya que significa que cuando intentamos contraer el resorte a un punto, esta puede desarrollar toda la fuerza que sea necesaria para evitarlo.

La importancia de este teorema radica en la hipótesis (4), ya que significa que cuando intentamos contraer el resorte a un punto, esta puede desarrollar toda la fuerza que sea necesaria para evitarlo.

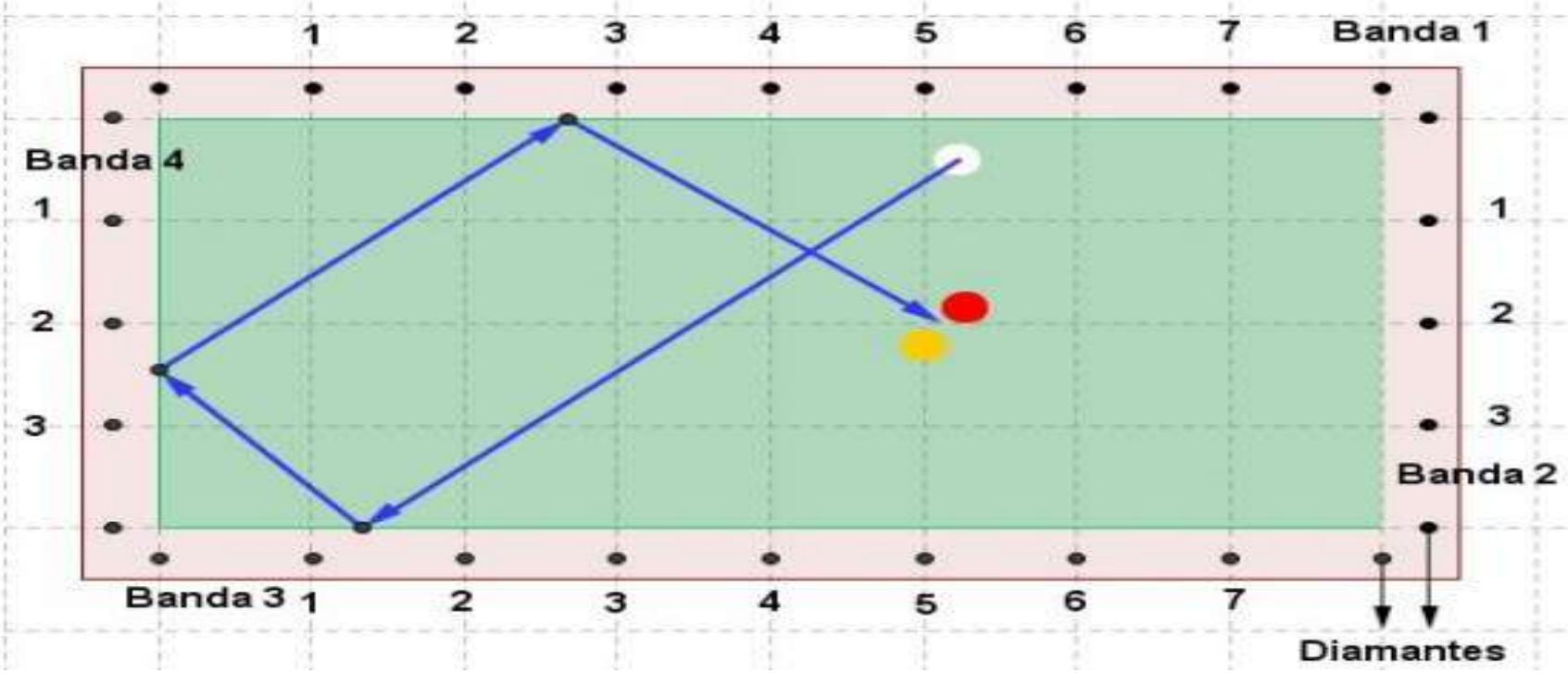
Utilizaremos la ecuación diferencial que describe el movimiento de la partícula, y la hipótesis (4) será fundamental para evitar la existencia de soluciones llamadas soluciones de colisión que en nuestro caso serían movimientos $x(t), v(t)$ definidos para t en un cierto t^+ talque

$$\lim_{t \to t^+} x(t) = 0$$

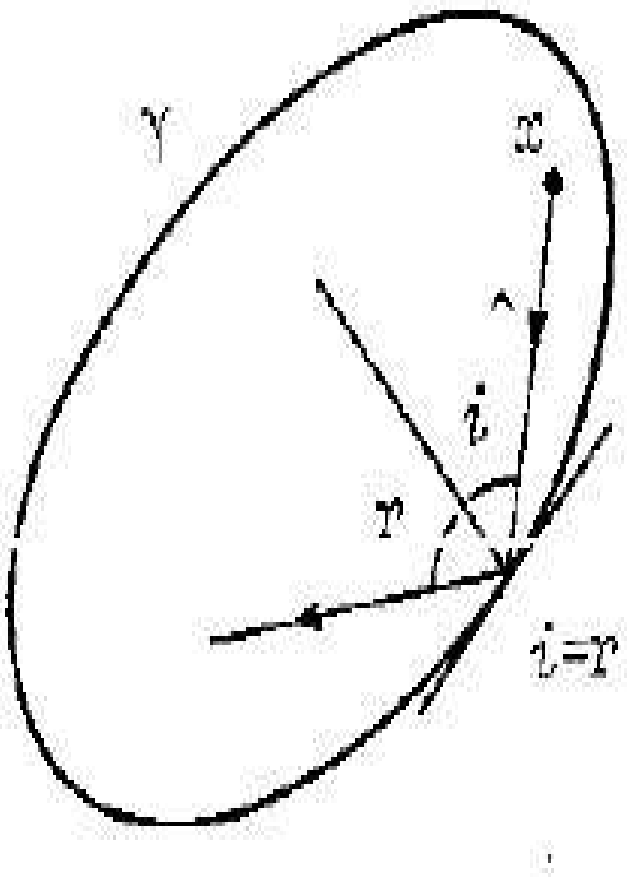
Este problema de colisiones es un problema frecuente en mecánica.

MESA DE BILLAR

EJEMPLO 2:



Las trayectorias parabólicas que toman las bolas, de acuerdo a la parte en donde es golpeada con el taco.

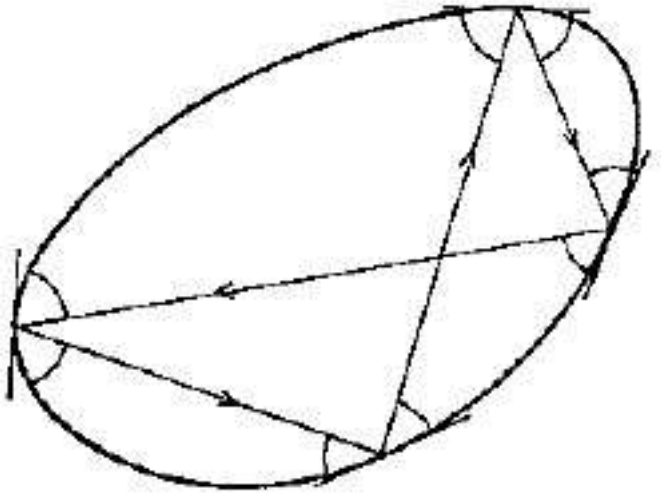


Consideremos una curva convexa cerrada y en su interior de una partícula (la bola de billar) que se mueve con velocidad constante conserva su valor absoluto y cambia de dirección de forma que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

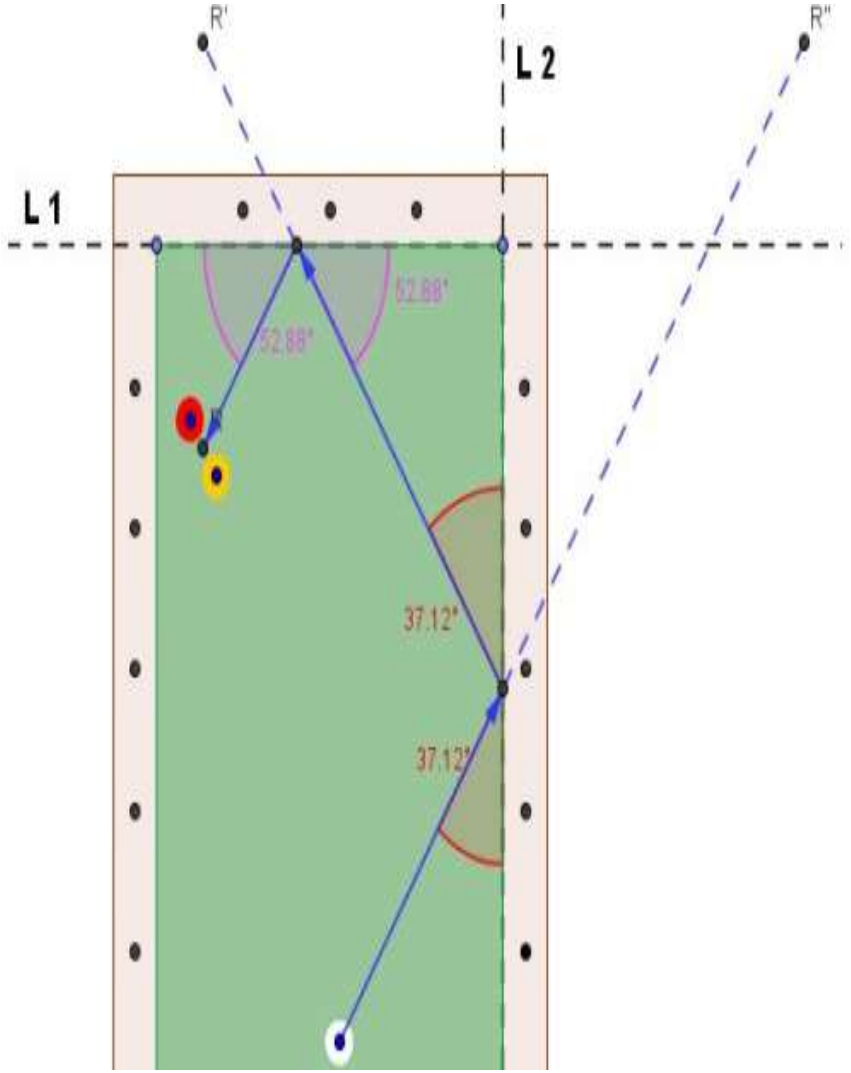
Teorema 2. Para todo $m \geq 2$ existe un movimiento periódico de periodo m.

Para todo existe un movimiento periódico de periodo .
periódico de periodo m.

El punto se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad constante hasta que llega a la frontera. El reflejo en la frontera es elástico y esta sujeto a una ley familiar: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión . Después de la reflexión, el punto sigue su movimiento libre, con la nueva velocidad hasta que llega a la frontera de nuevo.

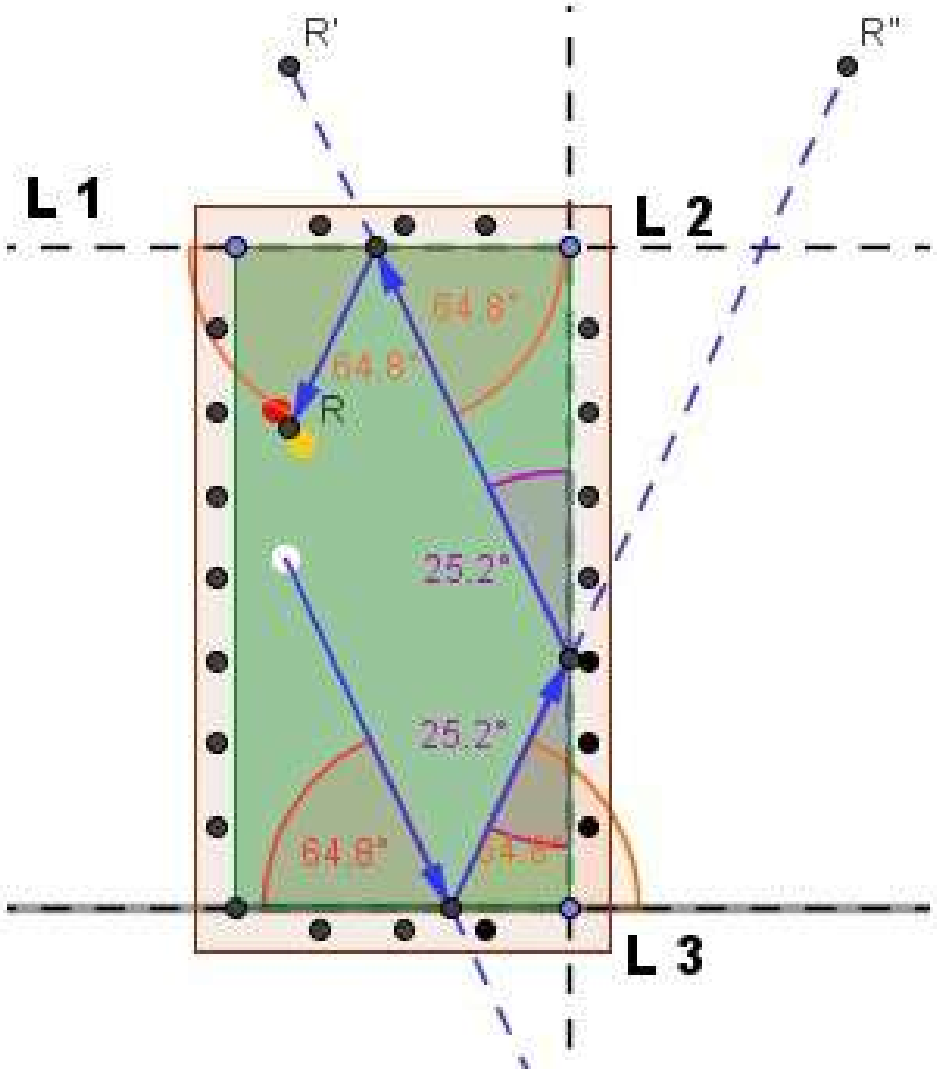


Brinco de dos bandas



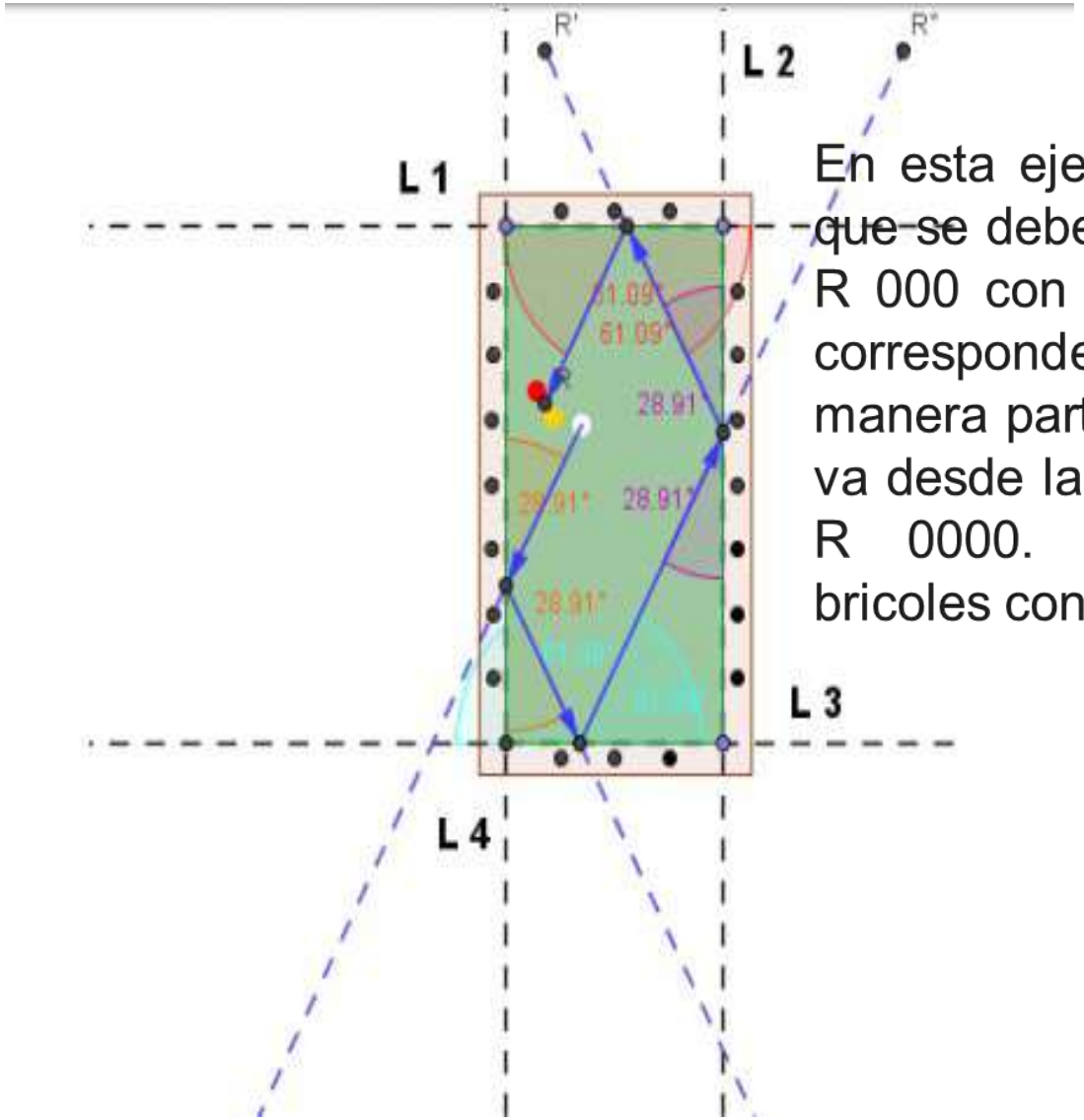
La bola chocará con la banda $L2$ y su recorrido se reflejará con el mismo ángulo de incidencia siguiendo la trayectoria en línea recta desde el punto de incidencia hasta R', de manera análoga, chocará con $L1$, y esta vez se recorrido en línea recta desde este punto hasta el punto R

Brinco de tres bandas

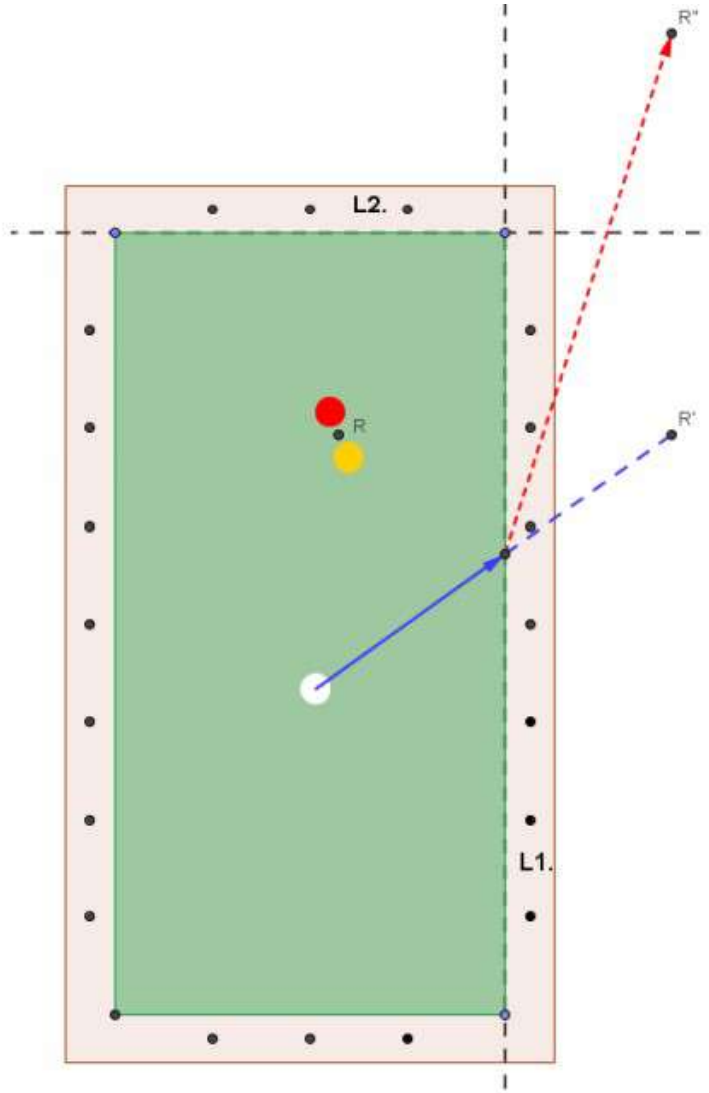


La bola chocará con la banda $L2$ y su recorrido se reflejará con el mismo ángulo de incidencia siguiendo la trayectoria en línea recta desde el punto de incidencia hasta R', de manera análoga, chocará contra $L1$, y tomará en esta ocasión el recorrido en línea recta desde este punto donde colisiona con la banda hasta el punto R'' que se encuentra entre las bolas amarilla y roja.

Brinco de mas de 3 Bandas



En esta ejecución se tendrá en cuenta que se debe hallar el punto simétrico de R 000 con respecto a la recta , que corresponde a la banda 1, y de esta manera partir de establecer la línea que va desde la bola tiradora hasta el punto R 0000. Así, sucesivamente para bricoles con mayor cantidad de bandas.



Al momento de hacer la composición de rebotes se debe tener en cuenta que la trayectoria de la bola tiradora no toque las bolas de llegada antes de colisionar contra el numero de bandas que se ha previsto.

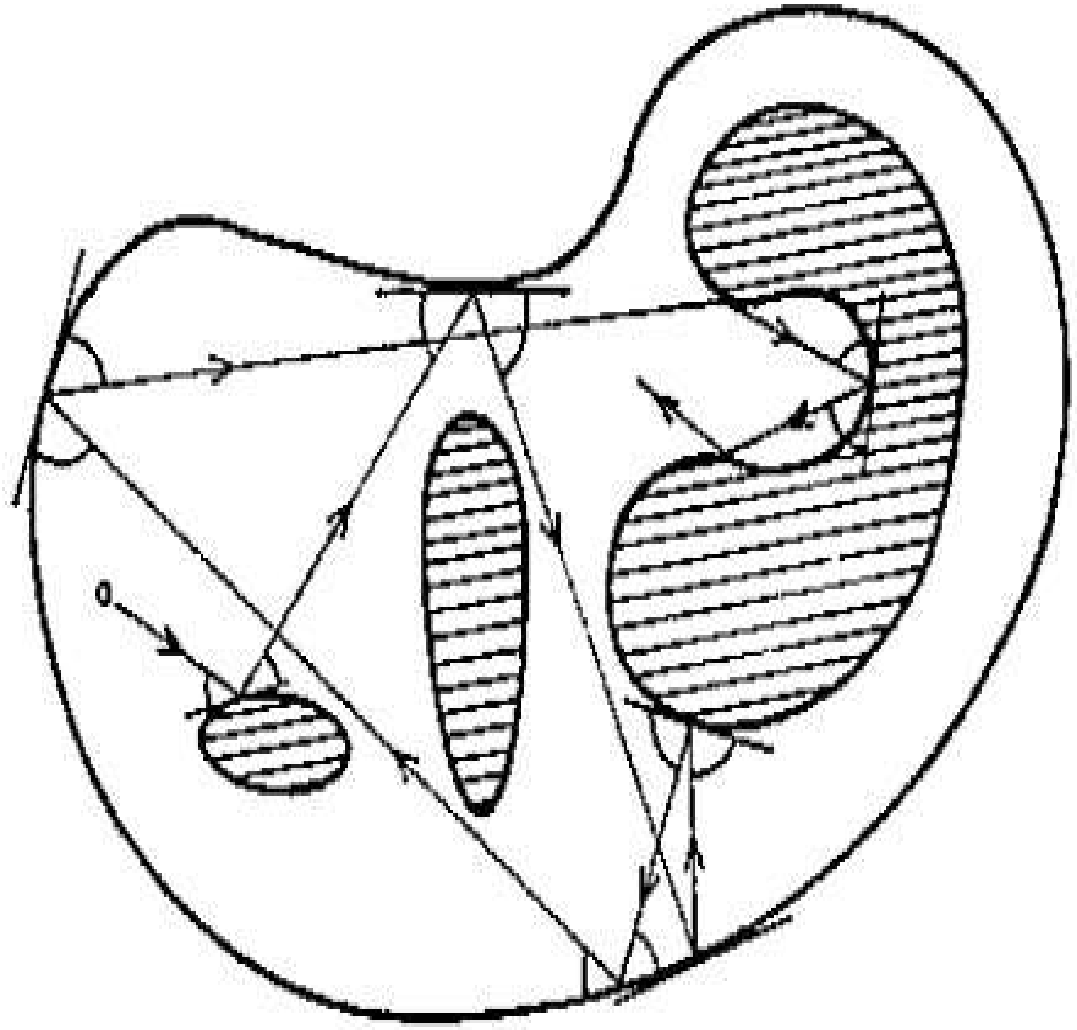
Recomendaciones

- La mesa de juego no debe tener el menor desnivel.
- El paño debe estar limpio y sin imperfecciones que provoquen trayectorias no deseadas de las bolas.
- Se recomienda hacer la simetría del punto al cual queremos llegar con la bola tiradora con respecto a la banda corta mas cercana a este punto

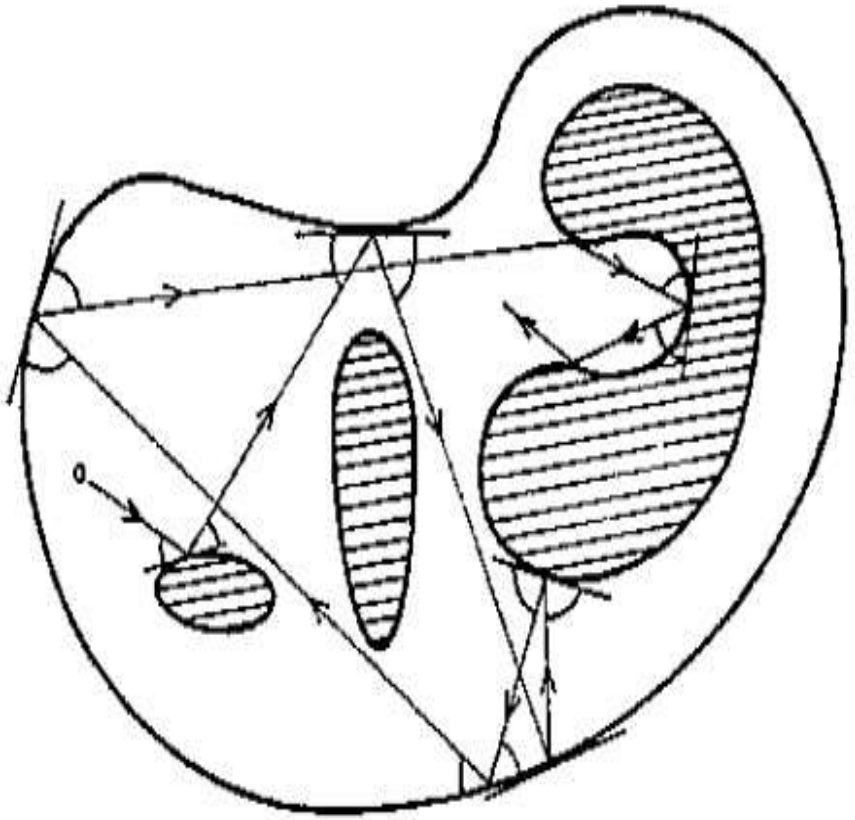
EJEMPLO 3:

Teorema 3: Para casi cualquier condición el movimiento de la bola de billar es recurrente. De hecho, este último teorema vale:

- Que curva y no sea convexa.
- Hay obstáculos en Ω. es decir, curvas cerradas contenidas en Ω con las que la bola choca siguiendo la misma ley que describimos antes.
- La mesa de billar sigue siendo un tópico de investigación de gran interés



Este dibujo es claro para cuando la mesa no es rectangular, cuando no sea convexa y aun mas cuando la mesa tenga obstáculos.



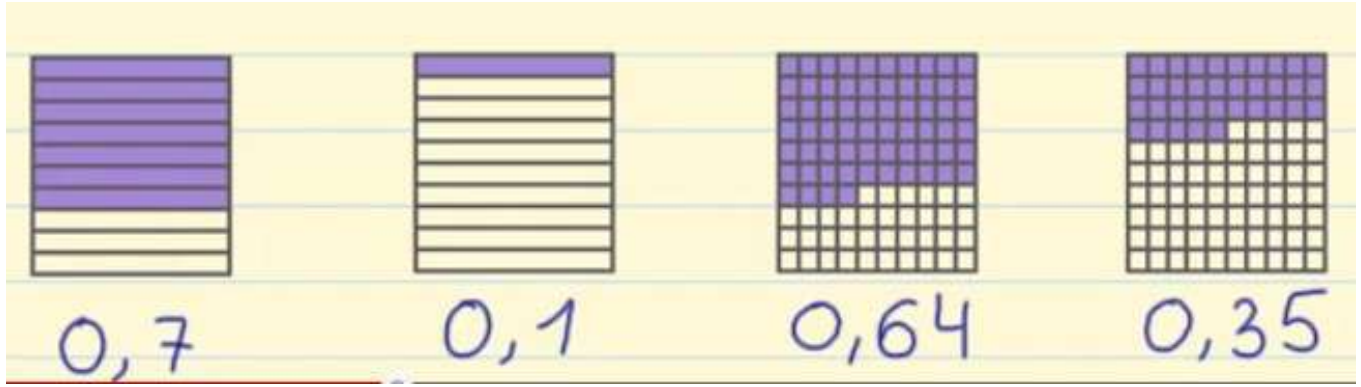
Por tanto, como vemos en el grafico las trayectorias que puede tomar la bola son infinitas y que pueden llegar a repetirse con el tiempo, lo cual implicaría que la bola se moviera libre mente en la mesa. Es decir:

1. Sin fricción
2. Movimiento infinito
3. Sin inclinación de la mesa

Por tanto, el movimiento es recurrente.

EJEMPLO 4

Números Decimales: Sea p un entero, $0<p<9$. Tomamos $x \in [0,1)$ y escríbalo en forma decimal:



$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$$

Si definimos como el número de veces que p aparece en el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Un número muy popular sería:

$$x = \pi - 3 = 0{,}14159265358979323846\ldots$$

La parte decimal es: $14159265358979323846\ldots$

Lo tomamos con 20 dígitos luego si p está, p estará 2 veces.

Esto nos da pie para mencionar el siguiente teorema:

Teorema 4

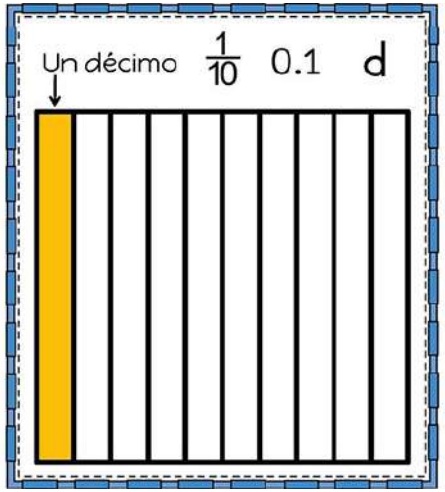
(REPRESENTACION DECIMAL).

Para casi todo $x \in [0,1)$ y sea $N(n)$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = \frac{1}{10}$$

Para casi todo , cada digito p ocupa asintóticamente 10% las posiciones.

Para casi todo $x \in [0,1)$, cada digito p ocupa asintóticamente 10% las posiciones.



De cierta forma el resultado parece natural aunque, evidentemente, no sea trivial. si tuviéramos que adivinar cuál es el valor del límite de $\frac{N(n)}{n}$ (suponga que no cuestionamos la existencia del limite) es claro que diríamos $\frac{1}{10}$, sólo porque intuimos en el algoritmo decimal una cierta simetría entre los dígitos.

Mucho más difícil resulta improvisar sobre la misma cuestión, si el algoritmo decimal y sustituido por las fracciones continuas.

EJEMPLO 5: *LAS FRACCIONES EN BASE BINARIA*:

- En el sistema decimal un número menor de 1 aparece en la forma $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, donde las "a_i" tienen valor de 0 y 9. Ellos corresponden a sumas de potencias negativas de 10.
- Por ejemplo:
- $0,68503 = 6 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10^2} + 5 \times \frac{1}{10^3} + 0 \times \frac{1}{10^4} + 3 \times \frac{1}{10^5}$.
- En base 2 sucede la misma cosa, así que con potencias negativas de 2 y los coeficientes solo pueden valer **0** ó **1**
- Por ejemplo 0,10011 es un número menor que 1 representado en la base 2, correspondiendo en la base 10 la siguiente suma de potencias negativas de $2: 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots 2^{-n}, \ldots, esto\ es$,
- $1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + 1 \times \frac{1}{2^4} + 1 \times \frac{1}{2^5}$

Cantor:

El conjunto de cantor C es un subconjunto cerrado del intervalo [0,1] obtenido como el complemento de una unión de intervalos abiertos. De la siguiente manera, se toma del intervalo [0,1] el intervalo abierto centrado en el punto medio de [0,1] de longitud $\frac{1}{3}$ tomando el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ es decir el tercio central. Luego se retiran los tercios centrales de cada uno de los intervalos restantes es decir de $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$; quedando los intervalos restantes

$$[0, \frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup[\frac{8}{9}, 1].$$

Así sucesivamente el proceso se repite inductivamente. El conjunto C de los puntos no retirados es el conjunto de cantor.

- El conjunto de cantor, que se describe tiene las siguientes propiedades:

1. Es compacto
2. Tiene interior vacío (no contiene intervalos)
3. No contiene puntos aislados (todos sus puntos son de acumulación)
4. No es numerable.

Ahora veamos el siguiente análisis. Sumamos las longitudes de los intervalos retirados, obteniéndolos:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right]$$

Por el criterio de la serie geométrica tenemos que $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ luego:

Por el criterio de la serie geométrica tenemos que luego:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=1$$

Con este análisis podemos concluir que la semilla tiene longitud 1y lo que se extrae también tiene longitud 1, por tanto, el conjunto de cantor tiene longitud 0

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FRACCIONES CONTINUAS

FRACCIONES CONTINUAS

NUMEROS MENORES QUE UNO EN LA BASE DOS , BASE BINARIA

EJEMPLO 6: Para expresar la fracción $\frac{m}{n}$ en base "**p**", con "**p**" número primo realizamos los siguientes cálculos :

$$n = mq + r_0 \therefore \frac{n}{m} = q + \frac{r_0}{m} con \ \ 0 < q < [\frac{n}{m}]$$

También;

$$\mathrm{p}r_0 = a_1 m + r_0 \ con \ \ 0 \leq r_1 < m, 0 \leq a_1 < p. esto \ es,$$

$$\frac{r_0}{m} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3}, \ldots \frac{a_k}{p^k m}.$$

Entonces $\frac{n}{m} = q, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots a_n]$ donde q= a_0.

(REPRESENTACION FRACCIONES CONTINUAS).

Esto es, todo irracional $x \in [0,1]$ puede ser escrito como:

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 \ \ldots}}}}$$

Esto es, todo irracional puede ser escrito como:

Donde $n_1, n_2, \ldots$ son enteros positivos. Mas precisamente esto significa:

$$x = \lim_{j \to \to \infty} \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ddots \ n_{j-1} + \cfrac{1}{n_j}}}}}$$

Donde son enteros positivos. Mas precisamente esto significa:

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

LA EXPRESION DE UN NUMERO REAL EN FRACCIONES CONTINUAS .

LA EXPRESION DE UN NUMERO REAL EN FRACCIONES CONTINUAS .

1. Como 78 y 28 son primos relativos , (78,28)=1, podemos expresar el numero racional $\frac{79}{28}$ como una fracción continua haciendo los siguientes cálculos :

$$\frac{79}{28} = 2 + \frac{23}{28} = 2 + \frac{1}{\frac{28}{23}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{5}{23}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{23}{5}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{3}{5}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{5}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}},$$

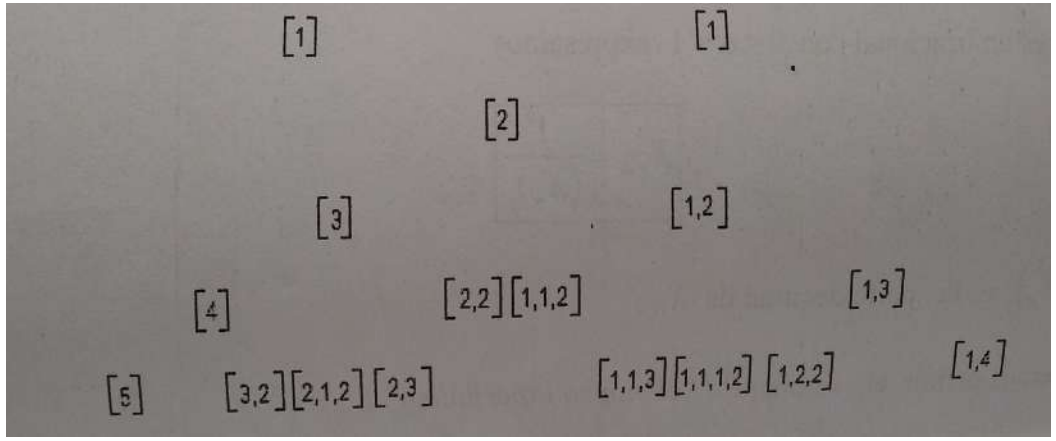
entonces, notamos la fracción $\frac{79}{28}$ mediante la siguiente notación en fracciones continuas , $\frac{79}{28}$=[2,1,4,2].

1. Como 78 y 28 son primos relativos , (78,28)=1, podemos expresar el numero racional como una fracción continua haciendo los siguientes cálculos :

entonces, notamos la fracción mediante la siguiente notación en fracciones continuas , =[2,1,4,2].

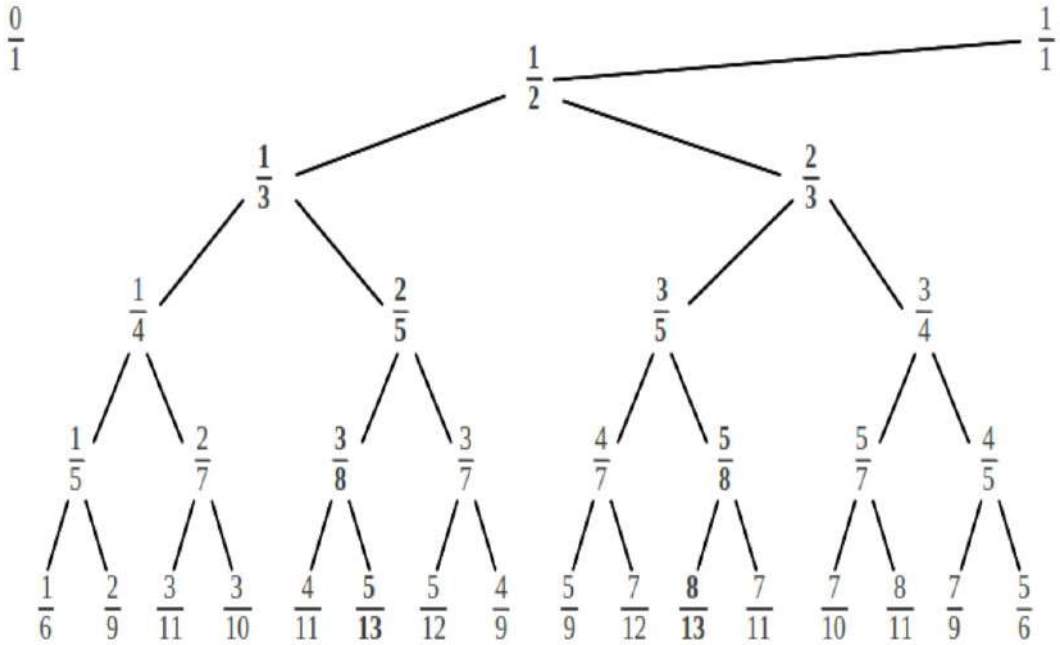
Ejercicio:

- Construcción del **árbol de farey** con **fracciones continuas** obtenemos el siguiente orden análogo del triangulo de pascal,



- Donde $w_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$ son las razones sucesivas de los números de Fibonacci, con la notación de las fracciones continuas.
- Con ; $r = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

- $w_1 = [1] = \frac{1}{1}$
- $w_2 = [1,1] = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$
- $w_3 = [1,1,1] = \frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$
- $w_4 = [1,1,1,1] = \frac{3}{5} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$.....
- ..Como $\frac{1}{\emptyset} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, en el limite de ese proceso es :
- $w_n = [1,1,1,\ldots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618$



Como, en el limite de ese proceso es :
=0,618

Eventos Aleatorios: σ- Algebra Borel

- ***Definición: Conjuntos de Borel:***

Un caso particularmente importante de espacio medible se tiene cuando (Ω, B) es un espacio topológico. Recordemos que B es una topología si verifica:

1) $\Omega, \emptyset \in B$.
2) Si $A_1, \ldots, A_n \in B$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in B$
3) Dada una colección arbitraria de $A_i \in B$, su unión $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in B$.

Dado un espacio topológico llamaremos a la generada por sus abiertos, que denotaremos y a sus elementos los llamamos.

Definición 2: Dado un espacio topológico (Ω, B) llamaremos ***σ- algebra de Borel*** a la generada por sus abiertos, que denotaremos $\sigma(B) = B(\Omega)$ y a sus elementos los llamamos ***borelianos***.

- **Ejemplo 1.** Los abiertos y cerrados son borelianos y si el espacio es Hausdorff también los compactos (pues son cerrados).
- **Lema 1.** Para cada $A \in \mathcal{C}$ se tiene que

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A = \sigma_A(\mathcal{C} \cap A).$$

Demostración. Se demuestra fácilmente que $\sigma(\mathcal{C}) \cap A$ es una $\sigma-álgebra$, de A que contiene a $\mathcal{C} \cap A$, por lo tanto

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A \supset \sigma_A(\mathcal{C} \cap A).$$

y para demostrar la otra inclusión consideramos la familia de "buenos conjuntos"

$$A = \{\mathcal{C} \in \sigma(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \cap A \in \sigma_A(\mathcal{C} \cap A)\},$$

la cual es $\sigma-álgebra$ y satisface

$$\mathcal{C} \subset A \subset \sigma(\mathcal{C}),$$

por tanto

$$A = \sigma(\mathcal{C})$$

y se tiene el resultado.

NOTA: Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω. La σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$, denotada por σ($\mathcal{C}$), es una σ-álgebra que satisface

(a) $\mathcal{C} \subset$ σ($\mathcal{C}$).

(b) Si A es otra σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ entonces σ($\mathcal{C}$) ⊂ A. σ($\mathcal{C}$) es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

- **Ejemplo 2.** En $\mathbb{R}$ con la topología usual, de las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, podemos tomar como para el que Como consecuencia veamos que (en los ejercicios se verán mas familias generadoras).

Demostración. Por una parte

y por otra

por lo que

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}$$

y el resultado se sigue.

$$\mathcal{N} \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- **Ejemplo 3.** Si , podemos considerar la base numerable formada por los rectángulos abiertos con , donde para utilizamos la notación

$$(a,b) = \prod(a_i,b_i) = \{(x_1,\ldots,x_n): a_i < x_i < b_i\},$$
$$(a,b] = \prod(a_i,b_i] = \{(x_1,\ldots,x_n): a_i < x_i \leq b_i\},\ etc\ldots$$

- **Proposición** La está generada por cualquiera de las clases:

$$\mathcal{C}_1 = \{(a,b), a,b \in \mathbb{R}^n\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(a,b], a,b \in \mathbb{R}^n\},$$
$$\mathcal{C}_1 = \{H = \{(x_1,\ldots,x_n): x_i \leq b\}, para\ algún\ 1 \leq i \leq n\ y\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Demostración. Por una parte todo abierto es unión numerable de rectángulos abiertos con extremos en , por otra parte observemos que

$$(a,b] = \{x_1 \leq a_1\}^c \cap \{x_1 \leq b_1\} \cap \cdots \cap \{x_n \leq a_n\}^c \cap \{x_n \leq b_n\},$$

por tanto se tienen la primera y tercera inclusiones (las otras son obvias)

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Recurrencia y Lema de Poincaré.

Dada una transformación que preserva medida y un subconjunto medible de su dominio, casi todo punto de ese subconjunto regresa infinitas veces a él mismo por iteraciones de la transformación.

Sea Ω un subconjunto de R^n un boreliano y μ una medida en B. Decimos que una transformación $T: \Omega \to \Omega$ preserva medida si para todo $A \in B(\Omega)$ vale

$$T^{-1}(A) \in B \text{ y } \mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A).$$

Análisis: $T: \Omega \to \Omega$ es una transformación que van de Ω a Ω y son sistemas dinámicos discretos que preserva la medida donde medida es una función que va de un boreliano de R^n a R.

Si para todo conjunto A que pertenece a los borelianos de Ω, vale que la inversa de la transformación también pertenece a B (En otras palabras no se sale de B, o sea es un sistema dinámico que avanza hacia delante y hacia atrás(orbitas)) y La medida de la imagen inversa de un cierto boreliano es igual a la medida de la original.

Teorema. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un Boreliano y μ una medida en S tal que $\mu(k) < \infty$. Entonces, si $T : S \to S$ preserva la medida, casi todo punto x de k es recurrente , esto es existe una secuencia $n_1 < n_2 < \cdots + \infty$ tal que el $\lim_{j \to +\infty} T^{n_j}(x) = x$

μ: es la invariante

Versión probabilística

Teorema: sea $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Dado $A \in \mathcal{A}$, sea A_0 el conjunto de los puntos $x \in A$ tales que $T^n(x) \in A$ para infinitos valores $n \geq 0$. Entonces $A_0 \in \mathcal{A}$ y $\mu(A_0) = \mu(A)$.

Demostración.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $B_m := \{x \in X : T^n(x) \in A, para\ algun\ n \geq m\}$. Vemos que:

I. $B_0 \supset B_1 \supset B_2, \ldots,$

II. $T^{-1}(B_m) = B_{m+1},$ y

III. $A_0 = A \cap (\bigcap_{m=0}^{\infty} B_m).$

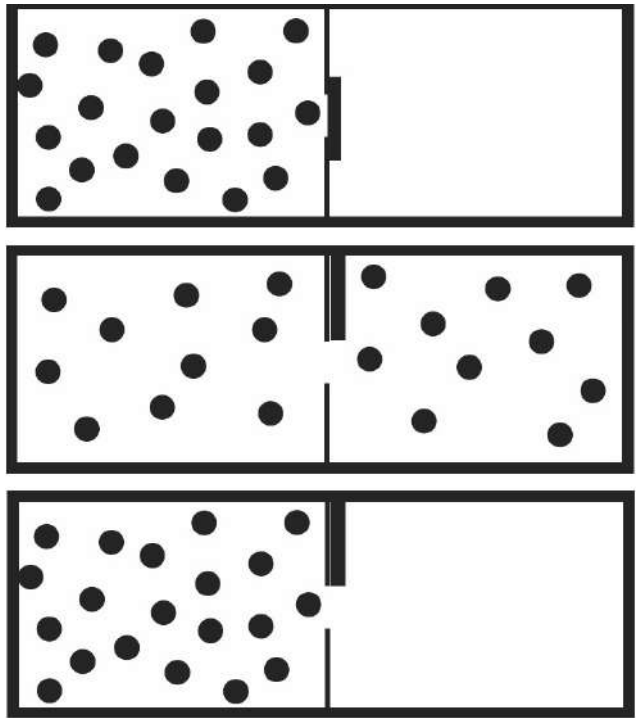
Luego, como T preserva medida, $\mu(B_{m+1}) = \mu(B_m)$ para todo $m \geq 0$, por consiguiente, como $\mu(X) < \infty$, concluimos que $\mu(\bigcap_{m=0}^{\infty} B_m) = \mu(B_0)$. Así, $\mu(A_0) = \mu(A \cap B_0)$, pues $A \subset B_0$.

EJEMPLO 7

- Imaginen una caja que contenga tanto a un gas como un espacio vacío separados del gas por una pared.

- Si perforamos la pared el gas escapara, según la experiencia común; pero el teorema de la recurrencia nos asegura que de esperar el tiempo apropiado el gas se reincorporara espontáneamente a su espacio original.

- Dicho en términos cotidianos, un pequeño agujero en un tanque de gas no debiera ser motivo de preocupación ya que bastara que esperemos un tiempo, T_r, para que el gas perdido en la atmosfera se acumule de nuevo en el tanque.



TRANSFORMACIONES ERGODICAS

Definición:

Sean (X, **A**,) y (Y, **B**, λ) espacios de probabilidad.

Decimos que : X → Y es una transformación que preserva medida si λ para todo **B**.

Decimos que : X → Y es una transformación inversible que preserva medida si es biyectiva y preservan medida.

Cuando una transformación S: X → X del mismo espacio medible (X, **A**,) preserva medida, diremos que el sistema (X, A, , S) es un sistema dinámico medible.

Este sistema es el objeto fundamental de nuestro estudio.

Teorema: (Birkhoff, 1931)

T es ergódica si y solo si para todo boreliano S tal que $T^{-1}(S) = S$ se cumple $\mu(S) = 0$,ó, $\mu(k)$

Definición 1 (funciones medibles):

- Sean (X_1, A_1) y (X_2, A_2) espacios medibles. Decimos que $T: X_1 \to X_2$ es medible si, para todo $A_2 \in A_2$, $T^{-1}(A_2) \in A_1$. Si X_1 y X_2 son espacios topológicos, decimos que $T: X_1 \to X_2$ es medible si lo es con respecto a las σ-algebras de borelianos.

- **Proposición 1:** sean (X_1, A_1) y (X_2, A_2) espacios medibles. $T: X_1 \to X_2$ y C una familia de subconjuntos de X_2 tal que la σ-algebra generada por C es A_2. Si para todo $C \in C$, $T^{-1}(C) \in A_1$, entonces T es medible.

(Se sigue de esta proposición que toda función continua $T: X_1 \to X_2$, entre los espacios topológicos X_1 y X_2 es medible)

Proposición 2. Supongamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ son espacios de medida σ-finititos y que $T : X \to Y$ es una transformación. Sea $\mathcal{B}_1$ una semi-algebra que genera $\mathcal{B}$. Si para cada $B \in \mathcal{B}_1$ tenemos que $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ y $\mu(T^{-1}(B)) = \lambda(B)$, entonces T preserva la medida.

Proposición 2. Supongamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ son espacios de medida σ-finititos y que $T : X \to Y$ es una transformación. Sea $\mathcal{B}_1$ una semi-algebra que genera $\mathcal{B}$. Si para cada $B \in \mathcal{B}_1$ tenemos que $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ y $\mu(T^{-1}(B)) = \lambda(B)$, entonces T preserva la medida.

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Demostración

T Es medible por la **proposición 1**

Sea $v_0 : B \to [0, \infty]$ la medida definida como:

$$v_0(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right)$$

Por hipótesis $v_0|B_1 = v$. Por el teorema de extensión de Hahn-Kolmogorov, v es la única extensión de la medida $v_0|B_1$. Luego $v_0 = v$, y, así, T preserva la medida.

Ahora, Damos algunos ejemplos de transformaciones que preservan la medida.

Ejemplo 8

Para todo vale:

Teorema 5. Para todo $x \in [0,1)$ vale:

Conductas de Entrada

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{N(m)}{m} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(p+1)^2}{p(p+2)}$$

Conductas de Entrada

(1)Transformación de Gauss

Sea ([0,1), el espacio de probabilidad tal que es la de los borelianos de [0,1) y es definida en un boreliano,por:

(1)Transformación de Gauss

Sea $([0,1), B, \mu)$ el espacio de probabilidad tal que B es la $\sigma - algebra$ de los borelianos de [0,1) n boreliano B,por:

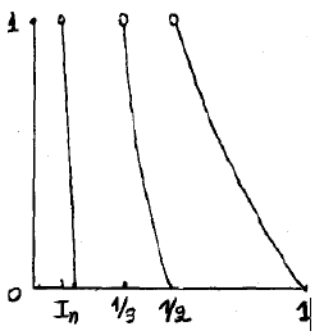
$$\mu(B) = \frac{1}{log2} \int_B \frac{1}{1+x} dx$$

Donde es la medida de lebesgue. En particular, si [a,b) es un sub-intervalo de [0,1) entonces .

Sea la transformación definida por y, si , , donde denota parte entera de . Esta es la llamada t **Gauss**.

Donde λ es la medida de lebesgue. En particular, si [a,b) es un sub-intervalo de [0,1) entonces .

$$\mu([a,b)) = \frac{1}{log2} \int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$$



Sea $\varphi: [0,1) \to [0,1)$ la transformación definida por $\varphi(0) = 0$ y, si $x \neq 0$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$, donde $[z]$ denota parte entera de z. Esta φ es la llamada **transformación de Gauss**.

Para todo vale:

Teorema 5. Para todo $x \in [0,1)$ vale:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{N(m)}{m} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(p+1)^2}{p(p+2)}$$

Demostración: Sea , un entero positivo y el porcentaje de veces que el entero aparece en los primeros elementos de desarrollo de en la función continua, esto es

Demostración: Sea $0 < x < 1$, k un entero positivo y $\frac{N(m)}{m}$ el porcentaje de veces que el entero k aparece en los primeros m elementos de desarrollo de x en la función continua, esto es

De la ergodicidad de la **transformación de Gauss** deduciremos que

$$\frac{N(m)}{m} = \frac{1}{n} \qquad \{1 \le j \le m \,|\, n_j(x) = k\}$$

De la ergodicidad de la **transformación de Gauss** deduciremos que

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{N(m)}{m} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(p+1)^2}{p(p+2)}$$

Observemos que $\lim_{m\to+\infty} \frac{N(m)}{m}$ es el tiempo medio de estadía de x en el intervalo $I_k = (\frac{1}{(k+1)}, \frac{1}{k})$. Esto es ya que $n_j(x)$ está determinado por la condición

$$\varphi^j(x) \in I_{n_j}(x)$$

Y entonces $\varphi^j(x) \in I_k$, si y solo si, $\varphi^j(x) = k$ es el tiempo medio de estadía de x en I_k, por la ergodicidad de φ, igual a $\mu(I_k)$ para casi todo $x \in X$.

Por lo tanto

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{N(m)}{m} = \mu(I_k) = \frac{1}{\log 2} \int_{\frac{1}{k+1}}^{1/k} \frac{1}{t+1}\, d\lambda = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(p+1)^2}{p(p+2)}$$

- **Conducta de entrada para procesos mezclante**

- **Teorema 1.1.** Sea S una *semi-álgebra* de subconjuntos de X. EL álgebra, $\mathcal{B}(S)$, generada por S, consiste precisamente de aquellos subconjuntos de X que pueden *ser escritos en la forma* $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ donde cada $A_i \in S$.

Si X es un espacio topológico, la *σ-álgebra de Borel* es la *σ-álgebra* $\mathcal{B}(X)$ generada por la familia de los conjuntos abiertos. Los elementos de $\mathcal{B}(X)$ son llamados *borelianos*.

Lema V.I *Sea $T: X \to X$ una transformación que preserva la medida de un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$. Sean $\mathcal{B}_0$ un álgebra que genera a $\mathcal{B}$ y $A, B \in \mathcal{B}$. Para todo $\varepsilon > 0$ existen $A_0, B_0 \in \mathcal{B}_0$ tales que para todo entero $n \geq 0$,*

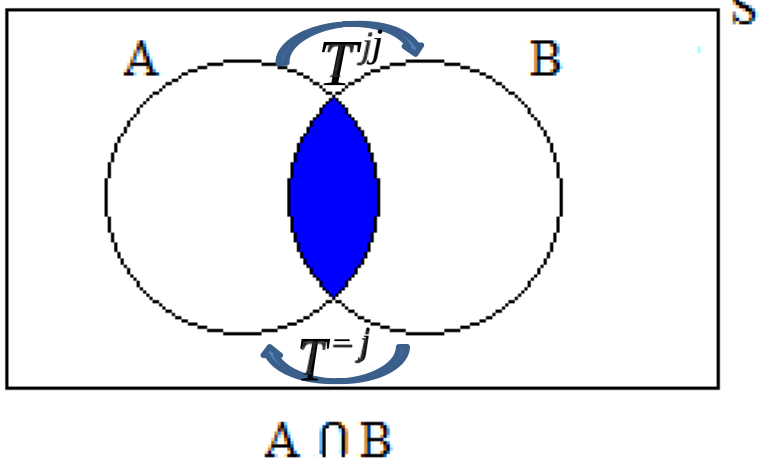
$$(i)\ |\mu(A) \cdot \mu(B) - \mu(A_0) \cdot \mu(B_0)| < \varepsilon$$
$$(ii)\ |\mu(T^{-j} A \cap B) - \mu(T^{-j} A_0 \cap B_0)| < \varepsilon$$

Lema V.I Sea T una transformación que preserva la medida de un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Sean un algebra que genera a y. Para todo existen , tales que para todo entero

Procesos Mezclantes Mixing

- Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema dinámico medible. Decimos que T es *mezclante si*, donde es un boreliano.

$$\lim_{j\to\infty} \mu\left(T^{-j}A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B)$$



- **Proposición:** Sean $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un *espacio de probabilidad*, S una *semi-álgebra que genera* $\mathcal{B}$ y $T: X \to X$ una *transformación que* preserva *medida.* Entonces T es mezclante *si, y sólo si,* $\forall A, B \in S$.

$$\lim_{j\to\infty} \mu\left(T^{-j}A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B)$$

Demostración: Probemos la suficiencia. Como cada elemento del álgebra $\mathcal{B}_0$ generada por S, puede ser escrito como una unión disjunta finita de miembros de S (**Teorema 1.1**) se sigue que la propiedad de convergencia, vale también para todos los elementos de $\mathcal{B}_0$. Sea $\varepsilon > 0$ dado y sean $A, B \in \mathcal{B}$. Usando el **Lema V.I** tenemos que existen $A_0, B_0 \in \mathcal{B}_0$ tales que, para todo $j \geq 0$,

$$|\mu(A) \cdot \mu(B) - \mu(A_0) \cdot \mu(B_0)| < \varepsilon \quad \text{y}$$
$$|\mu(T^{-j}A \cap B) - \mu(T^{-j}A_0 \cap B_0)| < \varepsilon.$$

Luego, si j es suficientemente grande,

$$|\mu(T^{-j}A \cap B)) - \mu(A) \cdot (B)| < 4\varepsilon.$$

Como A,B y $\varepsilon > 0$ son arbitrarios, T es mezclante.

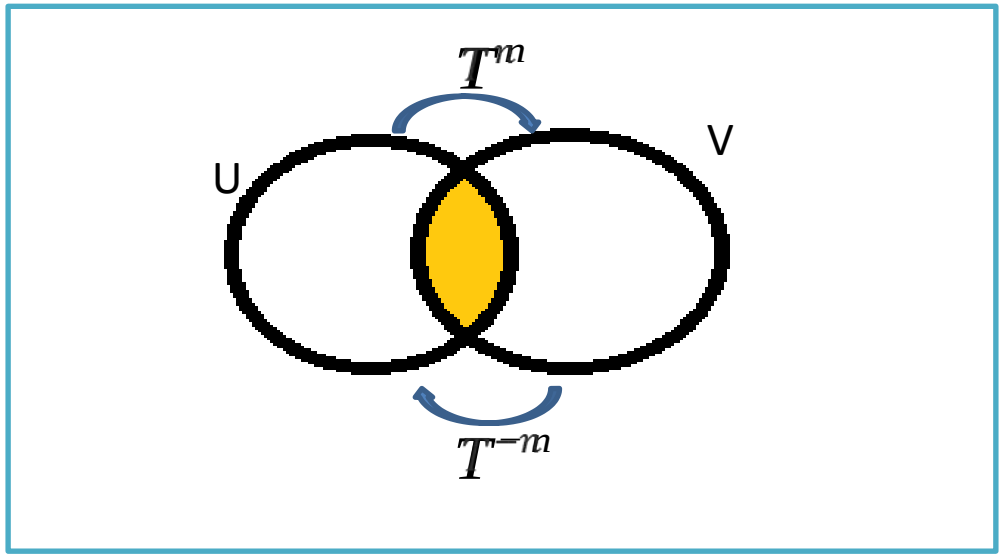
Sean X un espacio topológico y T una aplicación. Decimos que T es topológicamente mezclante si para todo par de abiertos no vacíos U, V existe N tal que, para todo $n \geq N$, $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Las nociones de mezclante y topológicamente mezclante se relacionan en espacios topológicos, por el siguiente resultado.

- **Teorema**: sea $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$ un sistema dinámico medible donde X es un espacio topológico. Supongamos que μ es positiva en todo abierto (no vacío) y que T es una transformación mezclante. Entonces T es topológicamente mezclante.

Demostración: sean U y V abiertos no vacíos. Como T es mezclante

$$\lim_n \mu(T^{-n}U \cap V) = \mu(U) \cdot \mu(V) > 0.$$

Entonces para todo n suficientemente grande $\mu(T^{-n}U \cap V) > 0$ y de este modo $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.



Ejemplo 9

Operador "Shift" "E"

- $Ef_n = f_{n-1},\ entonces\ tenemos:\ \ E^n - E^{n-1} - E^{n-2} = \mathrm{E}^{n-2}(\mathrm{E}^2 - \mathrm{E} - \mathrm{I}) = 0;$
- Su polinomio característico $(x^2 - x - 1) = 0$, el cual tiene como una sus raíces la razón de área.
- Si $\propto$ es un irracional con $0 < \propto < 1$ expresamos

$$X_{n+1} = \frac{1}{\langle X_n \rangle_1}$$

Donde $\langle x_n \rangle_1$ es la parte decimal de X_n. Así podemos definir el siguiente "mapeo hiperbólico" E:

$$E(X_n) = X_{n+1} = \frac{1}{\langle X_n \rangle_1}$$

En particular si "r" satisface la razón aurea , esto es talque $\frac{1}{r} = r + 1$,tenemos que r=[1,1,1,…] es un punto fijo de "E":

E[r]=r.

Además resulta que "E" ES LA FUNCION "shift" llamada también función desplazamiento siguiente:

E([a_0, a_1, a_2,…])=[a_0, a_1, a_2,…]

Ejemplo 10

INVARIANCIA Y PROPIEDADES DE MEZCLA EN SISTEMAS CAOTICOS.

En esta parte consideramos mapas definidos en $[0,1] \to [0,1]$. Primero, si suponemos $t = 1$, podemos describir dos clases bien conocidas de familias de dos modelos de mapa de ramificación. El tipo de mapas que se estudiaran toma la forma general $X_{t=}\varphi(X_{t-1})$ donde

- $$\varphi(X_{t-1}) = \begin{cases} \varphi_1(X_{t-1}) & 0 \le X_{t-1} < c \\ \varphi_2(X_{t-1}) & c \le X_{t-1} < 1 \end{cases}$$

Así tiene dos ramas y : cada rama será continua y monótona, con .

Así tiene dos ramas φ_1 y φ_2: cada rama será continua y monótona, con $0 \le \varphi_1(x), \varphi_2(x) \le 1$.
Consideramos dos familias de mapas:

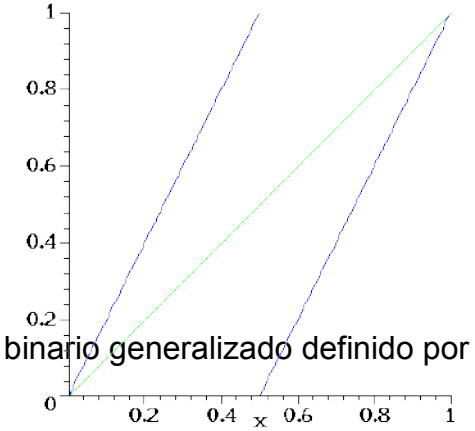
Consideramos dos familias de mapas:
El mapa de carpa generalizada definido por

El mapa de carpa generalizada definido por

donde . La familia contiene el mapa de la tienda para y el mapa logístico para . El mapa de desplazamiento binario generalizado definido por

donde . La familia anterior contiene la 2-adic del mapa para 1

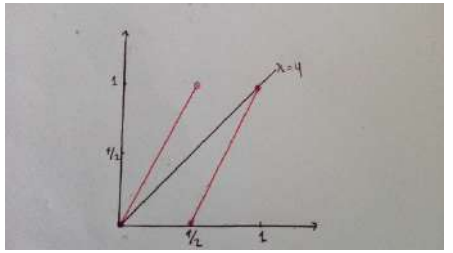
$$X_t = \begin{cases} 1-(1-2X_{t-1})^{v} & 0 \le X_{t-1} < \frac{1}{2} \\ 1-(2X_{t-1}-1)^{v} & \frac{1}{2} \le X_{t-1} < 1 \end{cases}$$



donde $0 < v \le 2$. La familia contiene el mapa de la tienda para $v = 1$ y el mapa logístico para $v = 2$. El mapa de desplazamiento binario generalizado definido por

$$X_t = \begin{cases} 1-(1-2X_{t-1})^{v} & 0 \le X_{t-1} < \frac{1}{2} \\ 1-(2-2X_{t-1})^{v} & \frac{1}{2} \le X_{t-1} \le 1 \end{cases}$$

donde $0 < v \le 2$. La familia anterior contiene la 2-adic del mapa para v =1.



No se conocen otros casos especiales de mapas. Las distribuciones invariantes de estas dos familias son conocidos solo en casos especiales y no pueden obtenerse analíticamente, aunque los métodos desarrollados por Kohda y Murao, por ejemplo, deberían ser capaces de dar aproximaciones numéricas.

EJEMPLO 11:

EJEMPLO 11:

1. Primero consideramos la familia del mapa de desplazamiento binario generalizado.

a. Cuando , tenemos la forma analítica para la distribución invariante que es la densidad uniforme. La forma general del mapa r-adic definido por

- $$X_t = \varphi(X_{t-1}) = rX_{t-1} \pmod 1, r > 1, r \in \mathbb{N}$$

También admite esta medida invariable. Podemos obtener este resultado usando la teoría de los operadores de Markov (ver Lasota y Mackay,(1994)) o de una representación de granulación gruesa. Aquí indicamos la representación mediante el promedio móvil de ruido blanco que podemos usar para otros sistemas. Suponemos que (pero el método es verdadero para cualquier valor entero de r).

Fijar el valor inicial , luego . El mapa asociado con es una secuencia de dígitos (que es su trayectoria) que cumple la siguiente regla

$$a_i = 0 \; si \; \varphi^i(x_0) \epsilon \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$a_i = 1 \; si \;\; \varphi^i(x_0) \epsilon \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

Por cierto es la expansión binaria de X_0, por lo tanto:

$$X_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, 2^{-(i+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

Dotado de la medida lebesgue, [0,1] es un espacio de probabilidad y, a través de su dependencia de , los se convierten en variables aleatorias independientes distribuidas de forma idéntica, con

Dotado de la medida lebesgue, [0,1] es un espacio de probabilidad y, a través de su dependencia de X_0, los a_i se convierten en variables aleatorias independientes distribuidas de forma idéntica, con

Entonces

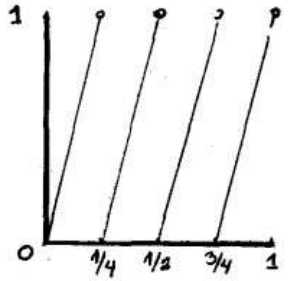
$$P[a_i = 0] = P[a_i = 1] = \frac{1}{2}.$$

Entonces

Y la secuencia determinística se realiza como una función del I.I.D. proceso ( ). Entonces podemos deducir que existe una medida invariante para el proceso y también obtener su densidad con respecto a la medida de lebesgue, ver Denker y Keller (1986) para otras aplicaciones.

$$X_n = \varphi^n(X_0) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i} \, 2^{-(1+i)}$$

Y la secuencia determinística $(\varphi^n(X_0))_{n\geq 0}$ se realiza como una función del I.I.D. proceso $((a_n)_{n\geq 0}$.). Entonces podemos deducir que existe una medida invariante para el proceso (X_t) y también obtener su densidad con respecto a la medida de lebesgue, ver Denker y Keller (1986) para otras aplicaciones.



b) Mapa llamado b definido por:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

$$\varphi(x) = 1 - \varphi_1(x) \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1,$$

Con es cercano en su comportamiento al mapa anterior. Se puede obtener una partición, dada , por lo que podemos mostrar la existencia de una medida invariante absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, ver Nicolis, Nicolis y MacKernan (1993).

Con $\varphi_1(x) = (1+\delta)x, 0 \le x \le a < \frac{1}{2}, \delta \ll 1$ es cercano en su comportamiento al mapa anterior. Se puede obtener una partición, dada 0, $\varphi(a), \frac{1}{2}, \varphi(1-a)$ por lo que podemos mostrar la existencia de una medida invariante absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, ver Nicolis, Nicolis y MacKernan (1993).

c) Donde podemos considerar dos mapas bidimensionales, el mapa de Baker definido por:

c) Donde $d = 2$, podemos considerar dos mapas bidimensionales, el mapa de Baker definido por:

Y el Anosov- Diffeomorfismo definido por:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{1}{2}y\right) & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \quad 0 < y < 1 \\ \left(2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \quad 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

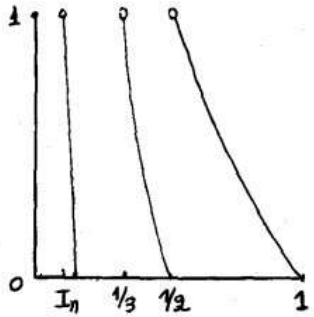
Y el Anosov- Diffeomorfismo definido por:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}x, 2y\right) & 0 \le x < 1, \quad 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, 2y - 1\right) & 0 \le x < 1, \quad \frac{1}{2} \le y \le 1. \end{cases}$$

Estas dos transformaciones son invertibles y se puede demostrar que admiten la medida de Borel como una medida invariante, ver Lasota y Mackey (1994), y Katok y Hasselblatt (1995).

d) Para $d > 1$, podemos considerar la clase de mapas de Shub (1969) en expansión local, y de Mayer (1984). Estas clases de mapas contienen el radio r y también $(d = 1)$, en la transformación fraccional continua definida por

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right].$$



Los mapas se expanden localmente y poseen medidas invariantes, incluso si la forma analítica no siempre se conoce y se caracterizan por la existencia de una partición de Markov asociada a ellos, véase Krzyzewski y Szlenk (1969) y Mayer (1984).

Los mapas se expanden localmente y poseen medidas invariantes, incluso si la forma analítica no siempre se conoce y se caracterizan por la existencia de una partición de Markov asociada a ellos, véase Krzyzewski y Szlenk (1969) y Mayer (1984).

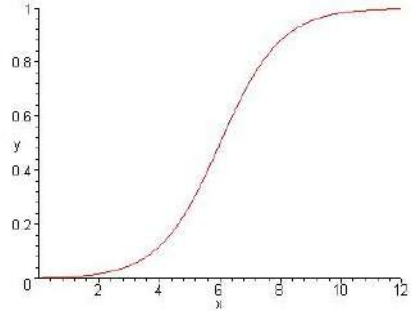
UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

• EJEMPLO 12:

• EJEMPLO 12:

2) Ahora consideramos la familia de mapas de tiendas generalizados: se sabe que la forma analítica de las distribuciones invariables es la densidad uniforme para el mapa de la tienda $(v = 1 \text{ in } 5.6)$, y la beta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ densidad para el mapa logístico $(v = 2 \text{ in } 5.6)$. Pruebas se pueden encontrar en Ulam y Von Neumann (1947), Bowen (1978), HoBbauer y Keller (1982), Lasota y Mackey (1994).

2) Ahora consideramos la familia de mapas de tiendas generalizados: se sabe que la forma analítica de las distribuciones invariables es la densidad uniforme para el mapa de la tienda in , y la beta densidad para el mapa logístico in . Pruebas se pueden encontrar en Ulam y Von Neumann (1947), Bowen (1978), HoBbauer y Keller (1982), Lasota y Mackey (1994).



Si consideramos la representación general del mapa logístico dado por:

Si consideramos la representación general del mapa logístico dado por:

$$X_t = \alpha X_{t-1}(1 - X_{t-1}) \qquad 0 \leq X_{t-1} \leq 1, \qquad (5.8)$$

La existencia de la densidad beta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ para el mapa logístico se aplica al caso único $\alpha = 4$. Para otros valores de α, la medida invariante no se conoce. Para $3.75 < \alpha < 4$, los histogramas iterativos han sido proporcionados por Hall y Wolff (1995) y Ladoucette (1999), pero no se proporciona una expresión analítica y es necesario dar los resultados teóricos.

La existencia de la densidad beta para el mapa logístico se aplica al caso único Para otros valores de la medida invariante no se conoce. Para los histogramas iterativos han sido proporcionados por Hall y Wolff (1995) y Ladoucette (1999), pero no se proporciona una expresión analítica y es necesario dar los resultados teóricos.

Lawrance y Spencer (1996) también dan histogramas simulados para la ecuación 5,6 para diferentes valores de $v \neq 1$, 2. un acercamiento para estos mapas se puede también desarrollar por el método de grano grueso.

Lawrance y Spencer (1996) también dan histogramas simulados para la ecuación 5,6 para diferentes valores de , 2. un acercamiento para estos mapas se puede también desarrollar por el método de grano grueso.

3. Finalmente, los sistemas caóticos importantes son los introducidos por Smale (1967) que verifican el axioma-A. Ruelle (1977) y Bowen (1978) han podido demostrar la existencia de una medida asintótica para estos sistemas, cuyo apoyo es a menudo un conjunto complicado de cantor. pero estas medidas no son absolutamente continuas con respecto a la medida Lebesgue ordinaria.

sin embargo todo el axioma los sistemas básicos apoyan una medida invariante ergódica y poseen tal medida con las características agradables, particularmente si tienen a tractores tienen la medida de SBR, y por lo tanto una medida natural. es interesante observar que para cierto no axioma-las medidas invariantes de un sistema pueden ser derivadas, consideran Meyer y Roepstorff (1983). Los resultados estándar muestran que los mapas continuos en un conjunto compacto tienen siempre una medida invariante ergódica.

incluso si la existencia de una medida invariante puede ser comprobada para la mayoría de los mapas definidos por [0,1] las propiedades de la mezcla para estos sistemas son mucho más difíciles de obtener. En realidad la mayoría de los resultados se refieren al mapa de radio Lasota y Mackey (1994) demuestran su exactitud que implica que este mapa es mezcla fuerte y ergódica. véase también Denker, Keller (1986) y Keller (1986) para otro enfoque. no se ha propuesto ninguna prueba en relación con las propiedades de mezclado, por ejemplo, para los sistemas Anosov y Baker.

recientemente, Gayraund y Guégan (1999) establecieron el ergodicidad geométrico del mapa de la tienda ($r = 2$ in 5.6) usando una ecuación maestra para obtener estos últimos siguen la obra de Nicolis y Nicolis (1988). primero se centran en la partición de la dos célula de para el mapa de la tienda:

$$C_1 = \{x : \ 0 \le x \le x_c\}, \qquad (5.9) \{x : x_c < x \le 1\} \qquad (5.9)$$

Donde $x_c = 2/$ es la posición del punto fijo inestable usando dos Estados denotados por 1 y 2, es posible obtener la matriz de transición,

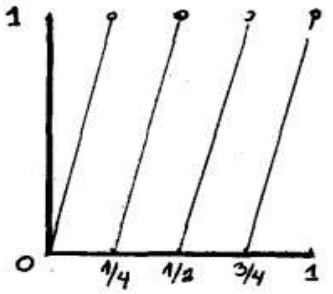
Donde x_c es la posición del punto fijo inestable. usando dos Estados denotados por 1 y 2, es posible obtener la matriz de transición,

$$W = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para la partición 5,9. la ecuación maestra obtenida con esta matriz de transición describe un proceso Markovian. Por lo tanto, es posible aplicar a esta representación el enfoque desarrollado por Denker y Keller (1986) para el mapa de radio usando el teorema de Lasota Yorke (1973). el mapa de alquiler puede ser representado como funcional de un proceso I.I.D. La estacionariedad de la función φ es debido a la invariación de la medida de Lebesgue en [0,1], mientras que la independencia de la secuencia que define la matriz de la transición refleja la característica que se mezcla del mapa de la tienda φ. Este método se puede extender fácilmente a otra clase de mapas de carpas generalizados representados por:

$$\varphi(x) = ax \ \text{ si } 0 \leq x \leq {}^{1}/_{2}$$

$$\varphi(x) = a(1-x) \ \text{ si } {}^{1}/_{2} < x \leq 1,$$



donde a es mayor que 2, vea MacKernan (1997). Además, el mapa logístico puede derivarse del mapa de la carpa mediante una transformación invertible, por lo que se pueden obtener las mismas propiedades de la misma manera. también es posible obtener la ecuación maestra exacta asociada con el mapa logístico utilizando el método de granulación gruesa, ver MacKernan (1997). en su tesis MacKernan consideró otros mapas caóticos no hiperbólicos pero comparando la matriz Markoviana es muy difícil.

para tales mapas, para los cuales la dinámica es altamente no uniforme como en sistemas intermitentes, es necesario definir las particiones que contienen un número infinito pero contable de células. otra extensión posible es una expresión tramos sobre cada célula de una partición mínima como polinomio. N. el método fue desarrollado por MacKernan y Nicolis (1993) utilizando un grano de Markov generalizado un tramo básico. Por este enfoque, puede ser posible derivar condiciones de mezcla para algunos sistemas deterministas tan pronto como se establezca la existencia de la medida invariante, incluso si no conocemos la forma analítica de la función de distribución.

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

BIBLIOGRAFIAS

- CONFERENCIAS: 2017-1,2017-2, RECURRENCIA Y LEMA DE POINCARE.
- INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ERGÓDICA, CARLOS GUTIERREZ.
- LIBRO: ASPECTOS ELEMENTARES DE LA TEORIA ERGODICA, MAÑE.
- https://www.ucursos.cl/usuario/6c35e35ec55a71af969f59a168a300a7/mi_blog/r/1_Probabilidades.pdf
- LIBRO: APUNTES DE TEORIA DE LA MEDIDA, Badajoz, 4 de enero de 2015, Dpto. de Matemáticas, Univ. de Estremadura. https://www.u-cursos.cl/usuario/cd02414e2bc5508cce32489d20338b29/mi_blog/r/librotmed.pdf
- LIBRO: TEORIA MEDIDA ESTADISTICA CASTILLEGAS URUGUAY 2017 (TEORIA ERGODICA DE LOS ATRACTORES TOPOLOGICOS Y ESTADISTICOS).
- LIBRO DE BILLARES